

# Zoom sur l'analyse multifractale

Céline ESSER

Brussels Summer School of Mathematics

ULB – 30 août 2022

- 1 Fonctions nulle part dérivables
- 2 Régularité ponctuelle
- 3 Ondelettes
- 4 Analyse multifractale
- 5 Analyse multifractale ailleurs

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est **dérivable** en un point  $x_0 \in U$  si la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On la note  $f'(x_0)$ .

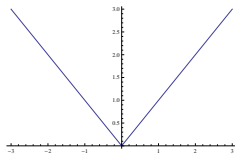
En particulier, toute fonction dérivable est continue. Par contre...

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est **dérivable** en un point  $x_0 \in U$  si la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On la note  $f'(x_0)$ .

En particulier, toute fonction dérivable est continue. Par contre...



$$x \mapsto |x|$$

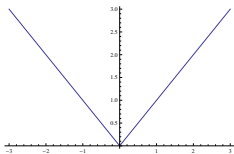


Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est **dérivable** en un point  $x_0 \in U$  si la limite

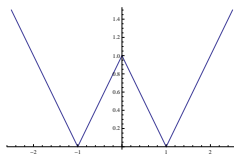
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On la note  $f'(x_0)$ .

En particulier, toute fonction dérivable est continue. Par contre...



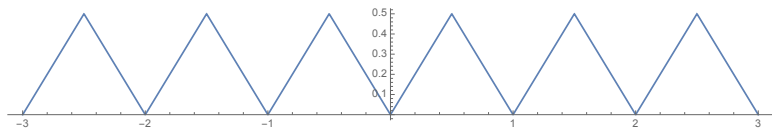
$$x \mapsto |x|$$



$$x \mapsto ||x| - 1|$$

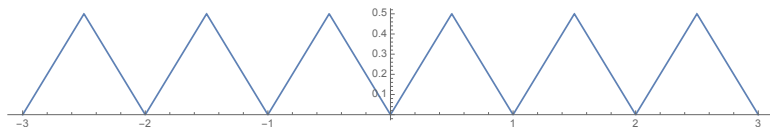
Fonction de Takagi (1903) : On considère dans un premier temps la fonction

$$\Phi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$$

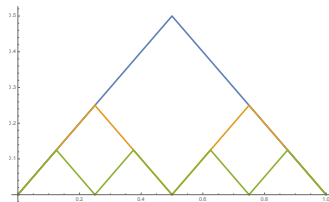


Fonction de Takagi (1903) : On considère dans un premier temps la fonction

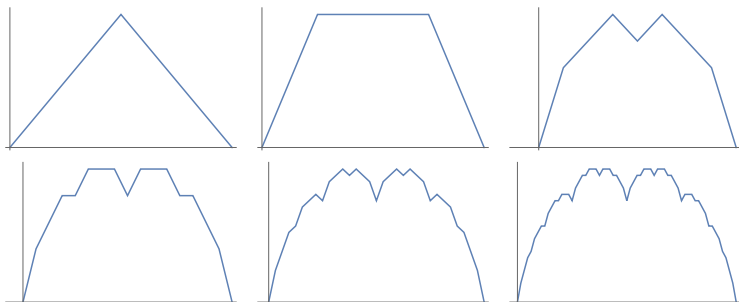
$$\Phi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$$



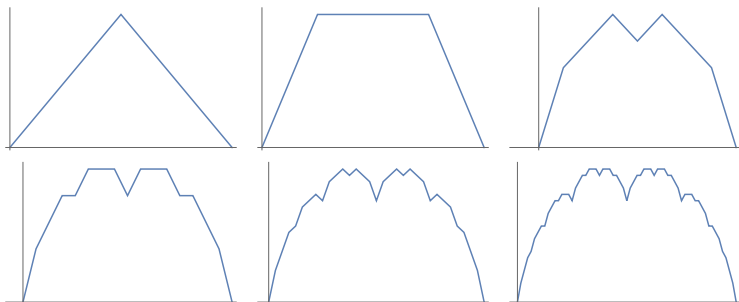
$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2^n} \Phi(2^n x)$$



$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \text{dist}(2^n x, \mathbb{Z})$$



$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \text{dist}(2^n x, \mathbb{Z})$$



$T$  est continue :

- $\text{dist}(2^n x, \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{2}$  et donc  $\Phi_n(x) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$
- La série qui définit  $T$  est donc uniformément convergente par le critère de Weierstrass.
- Pour tout  $n$ ,  $\Phi_n$  est continue donc  $T$  l'est également.

Pour montrer que  $T$  est non-dérivable, on va mettre à défaut le critère ci-dessous.

## Critère

Si  $f$  est dérivable en  $x$ , alors pour toutes suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui convergent vers  $x$  et telles que  $x_n \leq x < y_n$  pour tout  $n$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x).$$

## Démonstration.

Cela découle de

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x) \right| \\ = & \frac{|f(y_n) - f(x) + f(x) - f(x_n) - f'(x)(y_n - x + x - x_n)|}{y_n - x_n} \end{aligned}$$

Pour montrer que  $T$  est non-dérivable, on va mettre à défaut le critère ci-dessous.

## Critère

Si  $f$  est dérivable en  $x$ , alors pour toutes suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui convergent vers  $x$  et telles que  $x_n \leq x < y_n$  pour tout  $n$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x).$$

## Démonstration.

Cela découle de

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x) \right| \\ = & \frac{|f(y_n) - f(x) + f(x) - f(x_n) - f'(x)(y_n - x + x - x_n)|}{y_n - x_n} \\ \leq & \frac{|f(y_n) - f(x) - f'(x)(y_n - x)|}{y_n - x_n} + \frac{|f(x) - f(x_n) - f'(x)(x - x_n)|}{y_n - x_n} \end{aligned}$$

Pour montrer que  $T$  est non-dérivable, on va mettre à défaut le critère ci-dessous.

## Critère

Si  $f$  est dérivable en  $x$ , alors pour toutes suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui convergent vers  $x$  et telles que  $x_n \leq x < y_n$  pour tout  $n$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x).$$

## Démonstration.

Cela découle de

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x) \right| \\ = & \frac{|f(y_n) - f(x) + f(x) - f(x_n) - f'(x)(y_n - x + x - x_n)|}{y_n - x_n} \\ \leq & \frac{|f(y_n) - f(x) - f'(x)(y_n - x)|}{y_n - x_n} + \frac{|f(x) - f(x_n) - f'(x)(x - x_n)|}{y_n - x_n} \\ \leq & \left| \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} - f'(x) \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} - f'(x) \right| \end{aligned}$$

puisque  $y_n - x_n \geq y_n - x$  et  $y_n - x_n \geq x - x_n$ .





Dans le cas de  $T = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_n$  : Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\underbrace{\frac{k}{2^n}}_{x_n} \leq x < \underbrace{\frac{k+1}{2^n}}_{y_n}$$

On s'intéresse à

$$\frac{T(y_n) - T(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{T\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - T\left(\frac{k}{2^n}\right)}{\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}}$$

Dans le cas de  $T = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_n$  : Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\underbrace{\frac{k}{2^n}}_{x_n} \leq x < \underbrace{\frac{k+1}{2^n}}_{y_n}$$

On s'intéresse à

$$\begin{aligned} \frac{T(y_n) - T(x_n)}{y_n - x_n} &= \frac{T\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - T\left(\frac{k}{2^n}\right)}{\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Phi_m\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \Phi_m\left(\frac{k}{2^n}\right)}{\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}} \end{aligned}$$

Dans le cas de  $T = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_n$  : Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\underbrace{\frac{k}{2^n}}_{x_n} \leq x < \underbrace{\frac{k+1}{2^n}}_{y_n}$$

On s'intéresse à

$$\begin{aligned} \frac{T(y_n) - T(x_n)}{y_n - x_n} &= \frac{T\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - T\left(\frac{k}{2^n}\right)}{\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Phi_m\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \Phi_m\left(\frac{k}{2^n}\right)}{\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}} \end{aligned}$$

Dans le cas de  $T = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_n$  : Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\underbrace{\frac{k}{2^n}}_{x_n} \leq x < \underbrace{\frac{k+1}{2^n}}_{y_n}$$

On s'intéresse à

$$\begin{aligned} \frac{T(y_n) - T(x_n)}{y_n - x_n} &= \frac{T\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - T\left(\frac{k}{2^n}\right)}{\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Phi_m\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \Phi_m\left(\frac{k}{2^n}\right)}{\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \pm 1. \end{aligned}$$

Cette série diverge grossièrement et le critère permet donc de conclure que  $T$  n'est pas dérivable en  $x$ .

Si  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $n = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j(n)2^j$  avec  $b_j \in \{0, 1\}$  sa décomposition en base 2. La somme des chiffres de  $n$  est donnée par

$$s(n) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j(n) = \#\{j : b_j(n) = 1\}.$$

On définit la fonction sommatoire par

$$S(x) = \sum_{0 \leq n < x} s(n)$$

Alors

$$S(x) = \frac{x \log_2 x}{2} + O(x)$$

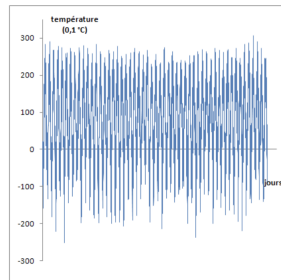
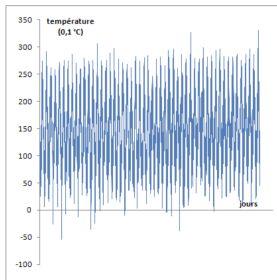
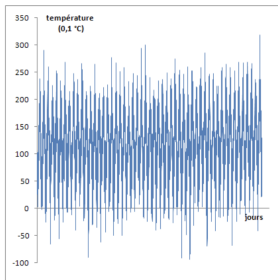
où le terme d'erreur  $O$  est une fonction continue et nulle part dérivable qui fait intervenir la fonction de Takagi (Trollope 1968).

*“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable  
des fonctions continues qui n’ont point de dérivées”*  
(Correspondance de Hermite à Stieltjes, 1893)

*“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable  
des fonctions continues qui n’ont point de dérivées”  
(Correspondance de Hermite à Stiltjes, 1893)*

Et pourtant...

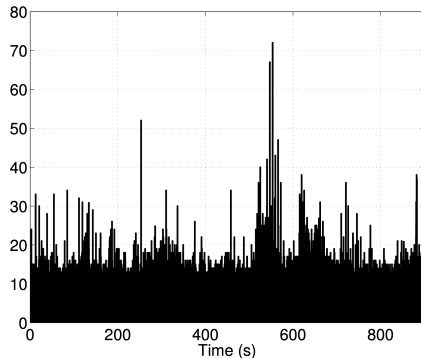
Température de l’air



*“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable  
des fonctions continues qui n'ont point de dérivées”*  
(Correspondance de Hermite à Stieltjes, 1893)

Et pourtant...

Traffic Internet



P. Abry, S. Jaffard, H. Wendt 2012



*“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable  
des fonctions continues qui n’ont point de dérivées”  
(Correspondance de Hermite à Stiltjes, 1893)*

Et pourtant...

Signaux financiers

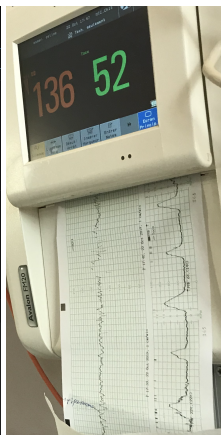


*P. Abry, S. Jaffard, H. Wendt 2012*

*“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable  
des fonctions continues qui n'ont point de dérivées”*  
(Correspondance de Hermite à Stieltjes, 1893)

Et pourtant...

Signaux biomédicaux



*“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable  
des fonctions continues qui n’ont point de dérivées”*  
(Correspondance de Hermite à Stiltjes, 1893)

Et pourtant...

Tissus urbains

*Une fractale engendrée par un processus aléatoire (à gauche)  
en comparaison avec la surface bâtie de Paris (à droite)*



*“Si les fonctions à dérivée sont les plus simples, les plus à faciles à traiter, elles sont pourtant l’exception ; ou, si l’on préfère un langage géométrique, les courbes qui n’ont pas de tangente sont la règle, et les courbes bien régulières, telles que le cercle, sont des cas fort intéressants, mais très particuliers [...] Au premier abord, de telles restrictions semblent n’être qu’un exercice intellectuel, ingénieux sans doute, mais en définitive artificiel et stérile, où se trouve poussé jusqu’à la manie le désir d’une rigueur parfaite. Et, le plus souvent, ceux auxquels on parle de courbes sans tangentes ou de fonctions sans dérivées commencent par penser qu’évidemment la nature ne présente pas de telles complications, et n’en suggère pas l’idée. C’est pourtant le contraire qui est vrai. Observons, par exemple un de ces flocons blancs qu’on obtient en salant de l’eau de savon. De loin, son contour peut sembler net, mais sitôt qu’on s’approche un peu, cette netteté s’évanouit. [...] Si l’on prend une loupe, un microscope, l’incertitude reste aussi grande car, chaque fois qu’on augmente le grossissement, on voit apparaître des anfractuosités nouvelles sans jamais éprouver l’impression nette et reposante que donne, par exemple, une bille d’acier polie. En sorte que, si cette bille donne une image utile de la continuité classique, notre flocon peut tout aussi logiquement suggérer la notion plus générale des fonctions continues sans dérivées.”*

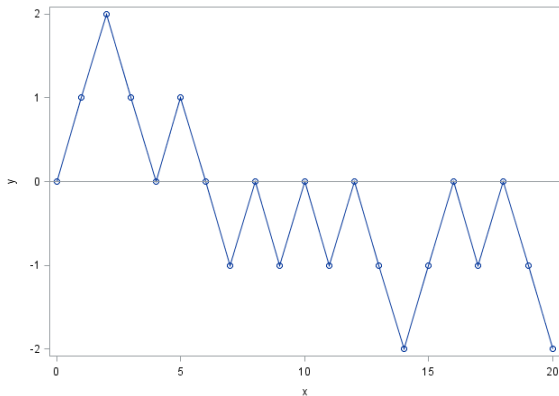
(Jean Perrin, Les atomes 1913)

## Le mouvement Brownien :

- Promeneur complètement ivre qui sort du bar et se déplace dans une rue droite.
- A chaque pas, comme il est ivre, il choisit aléatoirement un sens ou l'autre.

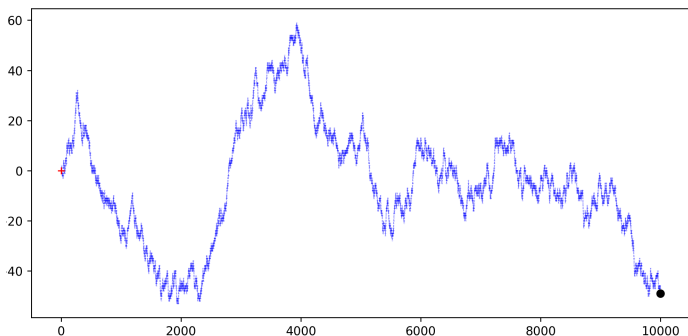
## Le mouvement Brownien :

- Promeneur complètement ivre qui sort du bar et se déplace dans une rue droite.
- A chaque pas, comme il est ivre, il choisit aléatoirement un sens ou l'autre.



## Le mouvement Brownien :

- Promeneur complètement ivre qui sort du bar et se déplace dans une rue droite.
- A chaque pas, comme il est ivre, il choisit aléatoirement un sens ou l'autre.
- Changement d'échelle de temps et d'échelle d'espace, zoom de plus en plus précis.



## Définition

Un mouvement brownien est un processus stochastique  $B = \{B(t) : t \geq 0\}$  (famille de variables aléatoires) tel que

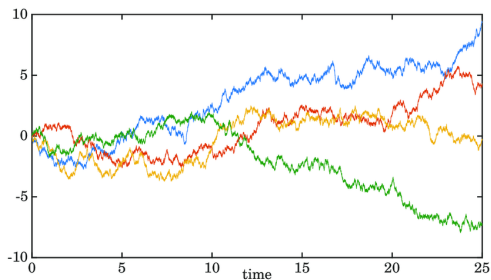
- $B(0) = 0$ ,
- pour tout  $t \geq 0$  et tout  $h \geq 0$ , on a  $B(t+h) - B(t) \sim \mathcal{N}(0, h)$  et  $B(t+h) - B(t)$  est indépendant de ce qui s'est passé avant  $t$ ,
- les trajectoires de  $B$  sont continues.



## Définition

Un mouvement brownien est un processus stochastique  $B = \{B(t) : t \geq 0\}$  (famille de variables aléatoires) tel que

- $B(0) = 0$ ,
- pour tout  $t \geq 0$  et tout  $h \geq 0$ , on a  $B(t+h) - B(t) \sim \mathcal{N}(0, h)$  et  $B(t+h) - B(t)$  est indépendant de ce qui s'est passé avant  $t$ ,
- les trajectoires de  $B$  sont continues.



## Définition

Un mouvement brownien est un processus stochastique  $B = \{B(t) : t \geq 0\}$  (famille de variables aléatoires) tel que

- $B(0) = 0$ ,
- pour tout  $t \geq 0$  et tout  $h \geq 0$ , on a  $B(t+h) - B(t) \sim \mathcal{N}(0, h)$  et  $B(t+h) - B(t)$  est indépendant de ce qui s'est passé avant  $t$ ,
- les trajectoires de  $B$  sont continues.

## Théorème (Wiener 1923)

Le mouvement Brownien existe !

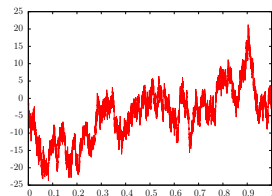
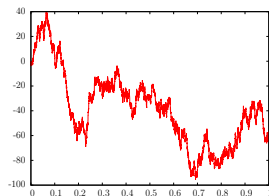
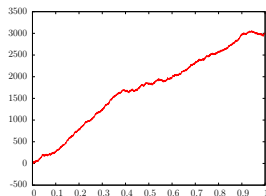
## Théorème (Paley, Wiener, Zigmund 1933)

Presque sûrement, les trajectoires du mouvement Brownien sont nulle part dérivables.

# Régularité ponctuelle

En 1931, Banach et Mazurkiewicz montrent que “la plupart” des fonctions continues sont nulle part dérivables.

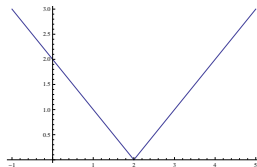
**Question.** Comment distinguer la régularité de deux fonctions continues non-dérivables ? Les espaces usuels ne suffisent pas !



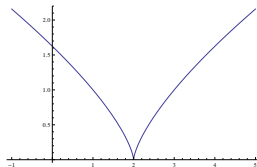
# Régularité ponctuelle

En 1931, Banach et Mazurkiewicz montrent que “la plupart” des fonctions continues sont nulle part dérivables.

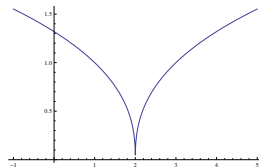
**Question.** Comment distinguer la régularité de deux fonctions continues non-dérivables ? Les espaces usuels ne suffisent pas !



$$x \mapsto |x - 2|$$



$$x \mapsto |x - 2|^{0.7}$$



$$x \mapsto |x - 2|^{0.3}$$

Remarquons que si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|$$

pour tout  $x$  proche de  $x_0$ .

Remarquons que si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|$$

pour tout  $x$  proche de  $x_0$ .

## Définition

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement bornée,  $\alpha \in [0, 1]$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f \in C^\alpha(x_0)$  s'il existe une constante  $C > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

pour tout  $x$  proche de  $x_0$ .

On peut faire de même pour créer des espaces intermédiaires entre  $C^p$  et  $C^{p+1}$ .

Si  $f$  est de classe  $C^p$  au voisinage de  $x_0$ , le théorème de Taylor assure qu'il existe un polynôme  $P$  de degré  $p - 1$  tel que

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{P(x)} + \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!} (x - x_0)^p.$$

On peut faire de même pour créer des espaces intermédiaires entre  $C^p$  et  $C^{p+1}$ .

Si  $f$  est de classe  $C^p$  au voisinage de  $x_0$ , le théorème de Taylor assure qu'il existe un polynôme  $P$  de degré  $p - 1$  tel que

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{P(x)} + \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!} (x - x_0)^p.$$

## Définition

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement bornée,  $\alpha \geq 0$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f \in C^\alpha(x_0)$  s'il existe une constante  $C > 0$  et un polynôme  $P$  de degré strictement inférieur à  $\alpha$  tels que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

pour tout  $x$  proche de  $x_0$ .



Les espaces ponctuels que l'on vient de définir sont emboîtés les uns dans les autres :  
Si  $\alpha' \leq \alpha$ , alors  $C^\alpha(x_0) \subseteq C^{\alpha'}(x_0)$ .

Les espaces ponctuels que l'on vient de définir sont emboîtés les uns dans les autres :  
Si  $\alpha' \leq \alpha$ , alors  $C^\alpha(x_0) \subseteq C^{\alpha'}(x_0)$ .

## Définition

L'exposant de Hölder de  $f$  en  $x_0$  est défini par

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

→  $h_f(x_0)$  informe sur la régularité de  $f$  en  $x_0$ . Plus il est petit, plus le graphe est irrégulier au voisinage de  $x_0$ .

Les espaces ponctuels que l'on vient de définir sont emboîtés les uns dans les autres :  
Si  $\alpha' \leq \alpha$ , alors  $C^\alpha(x_0) \subseteq C^{\alpha'}(x_0)$ .

## Définition

L'exposant de Hölder de  $f$  en  $x_0$  est défini par

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

→  $h_f(x_0)$  informe sur la régularité de  $f$  en  $x_0$ . Plus il est petit, plus le graphe est irrégulier au voisinage de  $x_0$ .

En particulier,

- si  $h_f(x_0) < 1$ , alors  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$ ,
- si  $h_f(x_0) > 1$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$ ,
- si  $h_f(x_0) = 1$ , on ne peut rien dire.

## Quid de la fonction de Takagi ?

- On sait qu'elle est nulle part dérivable, donc  $h_f(x) \leq 1$  pour tout  $x$ .
- Montrons que  $h_f(x) = 1$  pour tout  $x$ . Pour cela, il faut montrer que  $f \in C^\alpha(x)$  pour tout  $\alpha < 1$ .

## Quid de la fonction de Takagi ?

- On sait qu'elle est nulle part dérivable, donc  $h_f(x) \leq 1$  pour tout  $x$ .
- Montrons que  $h_f(x) = 1$  pour tout  $x$ . Pour cela, il faut montrer que  $f \in C^\alpha(x)$  pour tout  $\alpha < 1$ .
- Soit  $h \in ]-1, 1[$  et  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $2^{-(j+1)} < |h| \leq 2^{-j}$ . On calcule

$$\begin{aligned}
 |T(x+h) - T(x)| &\leq \sum_{n=0}^{j-1} |\Phi_n(x+h) - \Phi_n(x)| + \sum_{n \geq j} \underbrace{|\Phi_n(x+h) - \Phi_n(x)|}_{\leq 2^{-n}} \\
 &\leq \sum_{n=0}^{j-1} 2^{-n} \underbrace{|\Phi(2^n x + 2^n h) - \Phi(2^n x)|}_{\leq 2^n |h|} + 2 \cdot 2^{-j} \\
 &\leq j|h| + 2 \cdot 2^{-j} \\
 &\leq \log_2 \left( \frac{1}{|h|} \right) |h| + 4 \cdot |h| \\
 &\leq |h|^\alpha
 \end{aligned}$$

pour  $|h|$  suffisamment petit.

Dans le cas du mouvement Brownien  $B$ , on peut montrer que  $h_B(x) = \frac{1}{2}$  pour tout  $x$ .

## Théorème (Kolmogorov-Čentsov – faible)

Soit  $X = \{X(t) : t \in I\}$  un processus stochastique à trajectoires continues. S'il existe  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et une constante  $C > 0$  vérifiant

$$\mathbb{E} \left[ |X(t) - X(s)|^\alpha \right] < C |t - s|^{1+\beta}$$

pour tous  $s, t \in I$ , alors pour tout  $\gamma \in ]0, \beta/\alpha[$  et pour tout compact  $K \subseteq I$ , il existe une variable aléatoire presque sûrement finie  $D > 0$  telle que

$$|X(t) - X(s)| \leq D |t - s|^\gamma \quad \forall t, s \in K.$$

Dans le cas du mouvement Brownien  $B$ , on peut montrer que  $h_B(x) = \frac{1}{2}$  pour tout  $x$ .

## Théorème (Kolmogorov-Čentsov – faible)

Soit  $X = \{X(t) : t \in I\}$  un processus stochastique à trajectoires continues. S'il existe  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et une constante  $C > 0$  vérifiant

$$\mathbb{E} \left[ |X(t) - X(s)|^\alpha \right] < C |t - s|^{1+\beta}$$

pour tous  $s, t \in I$ , alors pour tout  $\gamma \in ]0, \beta/\alpha[$  et pour tout compact  $K \subseteq I$ , il existe une variable aléatoire presque sûrement finie  $D > 0$  telle que

$$|X(t) - X(s)| \leq D |t - s|^\gamma \quad \forall t, s \in K.$$

Si  $t > s$ , on a

$$\mathbb{E} \left[ |B(t) - B(s)|^2 \right] = t - s$$

car  $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ , mais cela ne suffit pas...

Si  $Z$  suit une loi normale centrée, on a

$$\mathbb{E}[Z^{2m}] = \frac{(2m!)}{2^m m!} (\mathbb{E}[Z^2])^m$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ . Donc

$$\mathbb{E}\left[|B(t) - B(s)|^{2m}\right] = \frac{(2m!)}{2^m m!} |t - s|^m$$

et en appliquant le théorème de Kolmogorov-Čentsov

$$|B(t) - B(s)| \leq D|t - s|^\gamma \quad \forall t, s \in K.$$

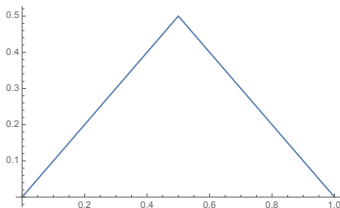
pour  $\gamma < \frac{m-1}{2m}$ . On prend ensuite  $m \rightarrow +\infty$ .

**Conséquence :**  $h_B(x) \geq 1/2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .



Considérons la fonction

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \Phi(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x) \\ &= \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$



## Décomposition de Lévy du mouvement Brownien

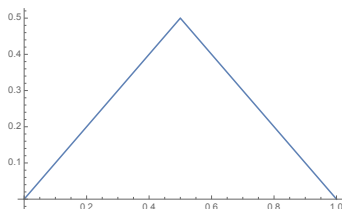
Soient  $\varepsilon, \varepsilon_{j,k}, j \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$ , des variables aléatoires i.i.d selon une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on pose

$$B(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \varepsilon_{j,k} 2^{-j/2} \Lambda(2^j t - k) + \varepsilon t. \quad (1)$$

Alors  $B = \{B(t) : t \in [0, 1]\}$  est un mouvement Brownien sur  $[0, 1]$ .

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \Phi(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x) \\ &= \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$



## Décomposition de Lévy du mouvement Brownien

Soient  $\varepsilon, \varepsilon_{j,k}, j \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$ , des variables aléatoires i.i.d selon une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on pose

$$B(t) = \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \varepsilon_{j,k} 2^{-j/2} \Lambda(2^j t - k)}_{:= B_0(t) \text{ ressemble à Takagi avec de l'aléatoire}} + \underbrace{\varepsilon t}_{\text{régulier}}. \quad (1)$$

Alors  $B = \{B(t) : t \in [0, 1]\}$  est un mouvement Brownien sur  $[0, 1]$ .

## Critère

Soit  $f$  une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} \Lambda(2^j t - k).$$

S'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $D > 0$  tels que  $|c_{j,k}| \leq D2^{-\alpha j}$  pour tous  $j, k$ , alors  $f \in C^\alpha(x)$  pour tout  $x$ .

## Critère

Soit  $f$  une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} \Lambda(2^j x - k).$$

S'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $D > 0$  tels que  $|c_{j,k}| \leq D 2^{-\alpha j}$  pour tous  $j, k$ , alors  $f \in C^\alpha(x)$  pour tout  $x$ .

En effet, soit  $h \in ]-1, 1[$ . Fixons  $J \in \mathbb{N}$  tel que  $2^{-(J+1)} < |h| \leq 2^{-J}$ . On a

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq \left| \sum_{j < J} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} (\Lambda(2^j(x+h) - k) - \Lambda(2^j x - k)) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j \geq J} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} \Lambda(2^j(x+h) - k) \right| + \underbrace{\left| \sum_{j \geq J} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} \Lambda(2^j x - k) \right|}_{= |\sum_{j \geq J} c_{j,k_x} \Lambda(2^j x - k_x)| \leq \sum_{j \geq J} D 2^{-\alpha j}} \\ &= |\sum_{j < J} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} (\Lambda(2^j(x+h) - k) - \Lambda(2^j x - k))| + \sum_{j \geq J} D 2^{-\alpha j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &\leq \sum_{j < J} \sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k}| |\Lambda(2^j(x+h) - k) - \Lambda(2^j x - k)| + 4D \cdot 2^{-\alpha J} \\
&\leq \sum_{j < J} 2D \cdot 2^{-\alpha j} 2^{j+1} |h| + 4D \cdot 2^{-\alpha J} \\
&\leq 4J 2^{(1-\alpha)J} |h| + 4D \cdot 2^{-\alpha J} \\
&\leq C|h|^\alpha
\end{aligned}$$

puisque  $\Lambda(2^j \cdot -k)$  est linéaire par morceaux et de pente en valeur absolue  $\leq 2^{j+1}$  et puisque  $|h| \sim 2^{-J}$ .

Pour le mouvement Brownien

$$B(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \varepsilon_{j,k} 2^{-j/2} \Lambda(2^j t - k) + \underbrace{\varepsilon t}_{\text{régulier}}$$

il suffit de contrôler asymptotiquement les gaussiennes  $\varepsilon_{j,k}$ . Grâce au lemme de Borel-Cantelli, on montre que presque sûrement, il existe  $C > 0$  tel que

$$\max_{k \in \{0, \dots, 2^j-1\}} |\varepsilon_{j,k}| \leq C \sqrt{2^j} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Pour le mouvement Brownien

$$B(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \varepsilon_{j,k} 2^{-j/2} \Lambda(2^j t - k) + \underbrace{\varepsilon t}_{\text{régulier}}$$

il suffit de contrôler asymptotiquement les gaussiennes  $\varepsilon_{j,k}$ . Grâce au lemme de Borel-Cantelli, on montre que presque sûrement, il existe  $C > 0$  tel que

$$\max_{k \in \{0, \dots, 2^j-1\}} |\varepsilon_{j,k}| \leq C \sqrt{2^j} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, on a

$$|\varepsilon_{j,k}| 2^{-j/2} \leq C \sqrt{2^j} 2^{-j/2} \leq D 2^{-\alpha j}$$

pour tout  $\alpha < 1/2$ .

Donc  $B \in C^\alpha(x)$  et on retrouve  $h_B(x) \geq 1/2$ .

# Ondelettes

Une ondelette est une fonction  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- **Localisation** : il existe  $\alpha > 1$  tel que

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- **Oscillation** : il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) dx = 0 \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}$$

On impose aussi souvent des conditions de régularité sur  $\psi$ .



# Ondelettes

Une ondelette est une fonction  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- **Localisation** : il existe  $\alpha > 1$  tel que

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- **Oscillation** : il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

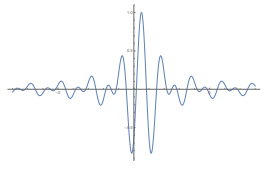
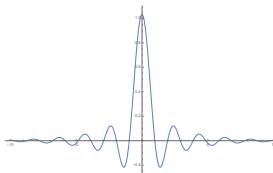
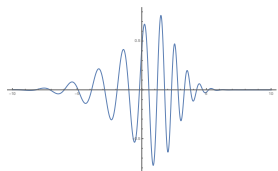
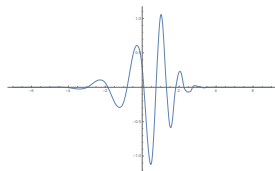
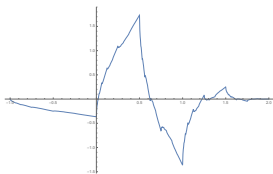
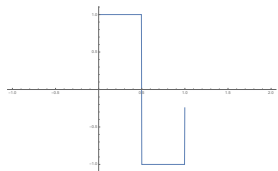
$$\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) dx = 0 \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}$$

On impose aussi souvent des conditions de régularité sur  $\psi$ .

**Base d'ondelettes de  $L^2(\mathbb{R})$ .** Base orthonormée de la forme

$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

## Quelques exemples. Ondelettes de Haar, de Daubechies, de Meyer, de Shannon



$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi(2^j \cdot -k) \quad \text{où} \quad c_{j,k} = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - k) dx.$$

On dit que les  $c_{j,k}$  sont les **coefficients d'ondelettes**. On peut les calculer même si  $f \notin L^2(\mathbb{R})$ !

$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi(2^j \cdot -k) \quad \text{où} \quad c_{j,k} = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - k) dx.$$

On dit que les  $c_{j,k}$  sont les **coefficients d'ondelettes**. On peut les calculer même si  $f \notin L^2(\mathbb{R})$  !

- Les bases d'ondelettes sont des bases inconditionnelles de nombreux espaces fonctionnels
- L'appartenance d'une fonction à de nombreux espaces fonctionnels se traduit par des conditions simples sur le module de ses coefficients d'ondelettes
- Les coefficients d'ondelettes permettent également de "presque" caractériser la régularité poncuelle d'une fonction !

- Si  $j, k \in \mathbb{Z}$ , on note  $\lambda(j, k) = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[$  et  $c_{j,k} = c_\lambda$ . L'idée est que  $\psi_{j,k}$  est localisé "près de" l'intervalle dyadique  $\lambda(j, k)$
- Les coefficients dominants de  $f$  sont définis à partir de maxima locaux de coefficients d'ondelettes :

$$d_{j,k} = d_{\lambda(j,k)} = \sup_{\lambda' \subseteq \lambda(j,k)} |c_{\lambda'}|$$

- Si  $j, k \in \mathbb{Z}$ , on note  $\lambda(j, k) = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[$  et  $c_{j,k} = c_\lambda$ . L'idée est que  $\psi_{j,k}$  est localisé "près de" l'intervalle dyadique  $\lambda(j, k)$
- Les coefficients dominants de  $f$  sont définis à partir de maxima locaux de coefficients d'ondelettes :

$$d_{j,k} = d_{\lambda(j,k)} = \sup_{\lambda' \subseteq \lambda(j,k)} |c_{\lambda'}|$$

## Caractérisation de l'exposant de Hölder (Jaffard 2006)

Si la fonction  $f$  est Höldérienne, alors l'exposant de Hölder de  $f$  en  $x_0$  est donné par

$$h_f(x_0) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(d_{\lambda_j(x_0)})}{\log(2^{-j})}$$

où  $\lambda_j(x)$  est l'unique dyadique intervalle  $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[$  d'échelle  $j$  qui contient  $x$ .

$$x \in \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[ \Rightarrow d_{j,k} \sim 2^{-h_f(x)j}$$

# Analyse multifractale

- La fonction de Takagi et le mouvement Brownien ont le même exposant de Hölder en chaque point  
→ Fonctions irrégulières très régulières !!

# Analyse multifractale

- La fonction de Takagi et le mouvement Brownien ont le même exposant de Hölder en chaque point  
→ Fonctions irrégulières très régulières !!
- Il existe des fonctions pour lesquelles l'exposant de Hölder change radicalement d'un point à l'autre : **fonctions multifractales**.
- La fonction de Riemann

$$R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$$



# Analyse multifractale

- La fonction de Takagi et le mouvement Brownien ont le même exposant de Hölder en chaque point

→ Fonctions irrégulières très régulières !!

- Il existe des fonctions pour lesquelles l'exposant de Hölder change radicalement d'un point à l'autre : **fonctions multifractales**.
- La fonction de Riemann

$$R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$$

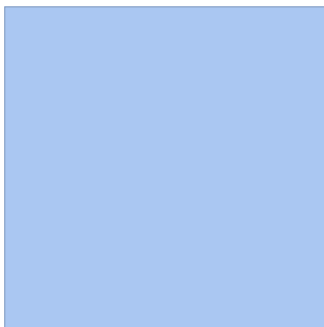
- Turbulence : Les signaux de vitesse très irréguliers dans certaines régions et beaucoup moins dans d'autres, sans que l'on puisse clairement assigner de frontières à ces régions (mélange de régularité apparaissant à toutes les échelles).

Complexité multi-échelle → fractales.

- Ensemble fractal
  - contient des détails à n'importe quelle échelle
  - possède parfois une certaine auto-similarité
  - parfois obtenu par une procédure de récurrence simple

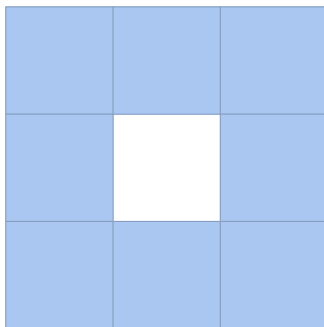
- Ensemble fractal

- contient des détails à n'importe quelle échelle
- possède parfois une certaine auto-similarité
- parfois obtenu par une procédure de récurrence simple



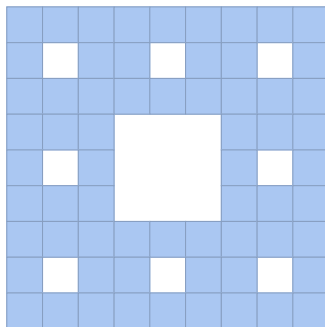
- Ensemble fractal

- contient des détails à n'importe quelle échelle
- possède parfois une certaine auto-similarité
- parfois obtenu par une procédure de récurrence simple

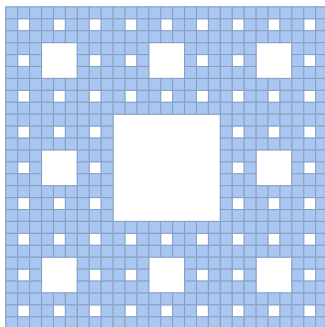


- Ensemble fractal

- contient des détails à n'importe quelle échelle
- possède parfois une certaine auto-similarité
- parfois obtenu par une procédure de récurrence simple

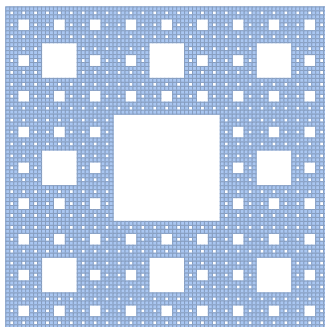


- Ensemble fractal
  - contient des détails à n'importe quelle échelle
  - possède parfois une certaine auto-similarité
  - parfois obtenu par une procédure de récurrence simple



- Ensemble fractal

- contient des détails à n'importe quelle échelle
- possède parfois une certaine auto-similarité
- parfois obtenu par une procédure de récurrence simple



- Ensemble fractal

- contient des détails à n'importe quelle échelle
- possède parfois une certaine auto-similarité
- parfois obtenu par une procédure de récurrence simple
- la “**dimension fractale**” de l'ensemble est strictement supérieure à sa dimension topologique.



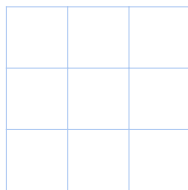
- Ensemble fractal

- contient des détails à n'importe quelle échelle
- possède parfois une certaine auto-similarité
- parfois obtenu par une procédure de récurrence simple
- la “dimension fractale” de l'ensemble est strictement supérieure à sa dimension topologique.



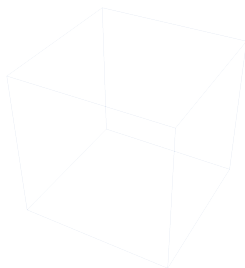
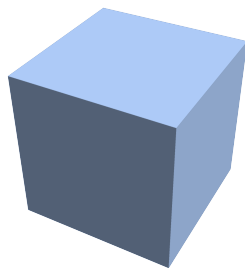
- Ensemble fractal
  - contient des détails à n'importe quelle échelle
  - possède parfois une certaine auto-similarité
  - parfois obtenu par une procédure de récurrence simple
  - la “**dimension fractale**” de l'ensemble est strictement supérieure à sa dimension topologique.
  
- Les dimensions fractales peuvent prendre des valeurs non entières. Elles traduisent la manière dont un ensemble fractal occupe l'espace à toutes les échelles.
  - Dimension de Minkowski
  - Dimension de Hausdorff (rend compte de manière plus fidèle de la complexité géométrique de l'ensemble mais plus difficile à calculer ou estimer numériquement)

# Dimension de Minkowski



$9 = 3^2$  carrés de  
côté  $\frac{1}{3} = 3^{-1}$

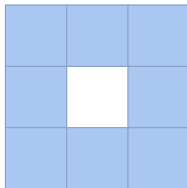
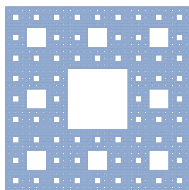
$$N(3^{-n}) = 3^{2n}$$



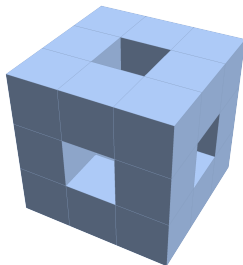
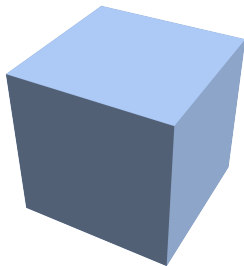
$27 = 3^3$  cubes de  
côté  $\frac{1}{3} = 3^{-1}$

$$N(3^{-n}) = 3^{3n}$$

# Dimension de Minkowski

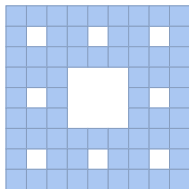
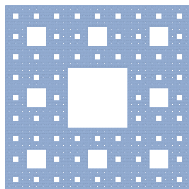


$$8 = 3^{\frac{\log 8}{\log 3}} \text{ carrés de} \\ \text{côté } \frac{1}{3} = 3^{-1}$$



$$20 = 3^{\frac{\log 20}{\log 3}} \text{ cubes} \\ \text{de côté } \frac{1}{3} = 3^{-1}$$

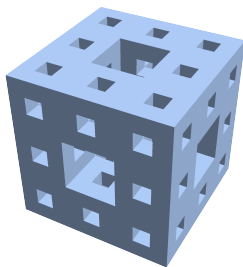
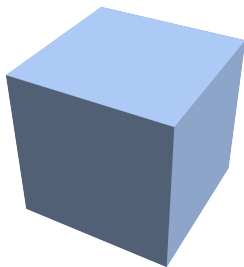
# Dimension de Minkowski



$$64 = 8^2 = 3^2 \frac{\log 8}{\log 3}$$

carrés de côté

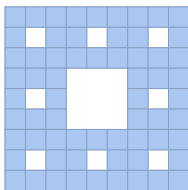
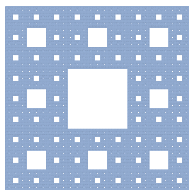
$$\frac{1}{9} = 3^{-2}$$



$$20^2 = 3^2 \frac{\log 20}{\log 3} \text{ cubes}$$

$$\text{de côté } \frac{1}{9} = 3^{-2}$$

## Dimension de Minkowski

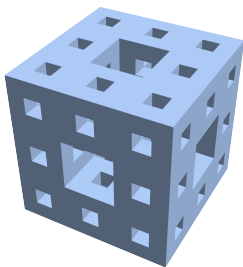
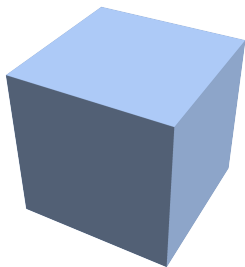


$$64 = 8^2 = 3^{\frac{\log 8}{\log 3}}$$

carrés de côté

$$\frac{1}{9} = 3^{-2}$$

$$N(3^{-n}) = 3^{\frac{\log 8}{\log 3} n}$$



$$N(3^{-n}) = 3^{\frac{\log 20}{\log 3} n}$$

Soit  $B \subset \mathbb{R}^n$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on note  $N(\varepsilon)$  le nombre de “carrés” de côté  $\varepsilon$  nécessaires pour recouvrir l’ensemble.

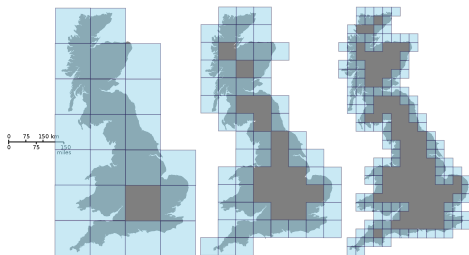
Si  $d$  est la dimension de Minkowski de  $B$ , on souhaite avoir

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d}$$

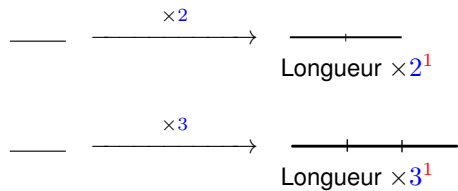
## Définition

Si elle existe, la dimension de Minkowski (ou de boîte) de  $S$  est

$$\dim_{\text{box}}(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(\varepsilon^{-1})}$$

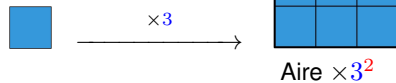
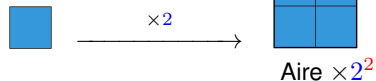
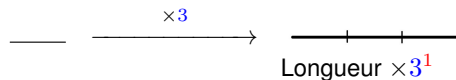
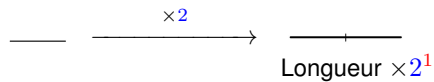


# Dimension de Hausdorff

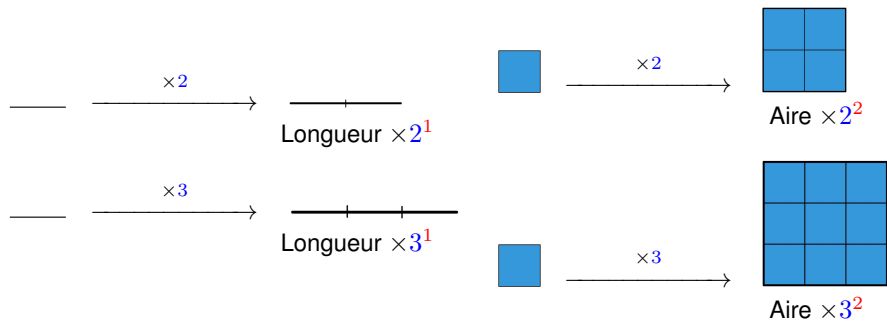




## Dimension de Hausdorff



# Dimension de Hausdorff



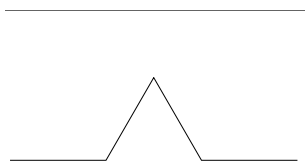
**Changement d'échelle.** Si on agrandit d'un facteur  $\lambda$  une figure de dimension  $d$ , alors sa "mesure" est multiplié par  $\lambda^d$ .

# Dimension de Hausdorff

---

longueur 1

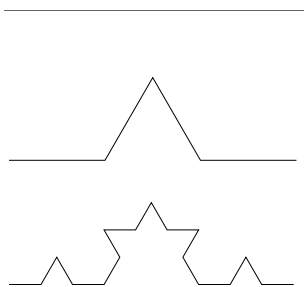
# Dimension de Hausdorff



longueur 1

$$\text{longueur } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

# Dimension de Hausdorff

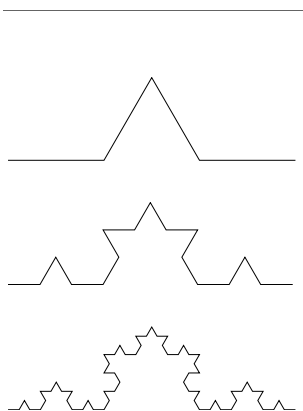


longueur 1

$$\text{longueur } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{longueur } 4 \times \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) = \left( \frac{4}{3} \right)^2$$

# Dimension de Hausdorff



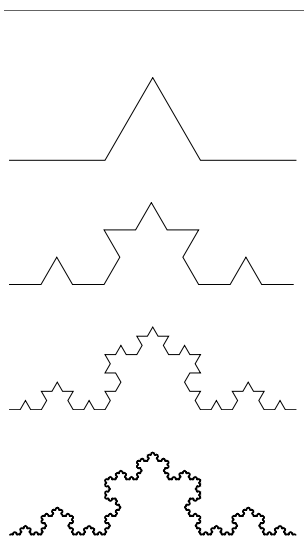
longueur 1

$$\text{longueur } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{longueur } 4 \times \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) = \left( \frac{4}{3} \right)^2$$

$$\text{longueur } \left( \frac{4}{3} \right)^3$$

# Dimension de Hausdorff



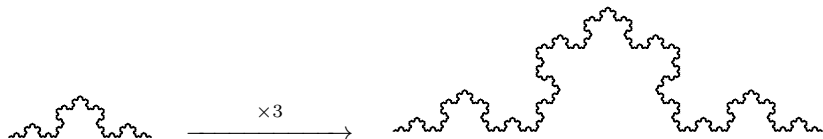
longueur 1

$$\text{longueur } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

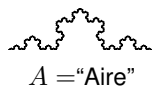
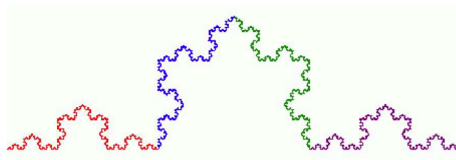
$$\text{longueur } 4 \times \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) = \left( \frac{4}{3} \right)^2$$

$$\text{longueur } \left( \frac{4}{3} \right)^3$$

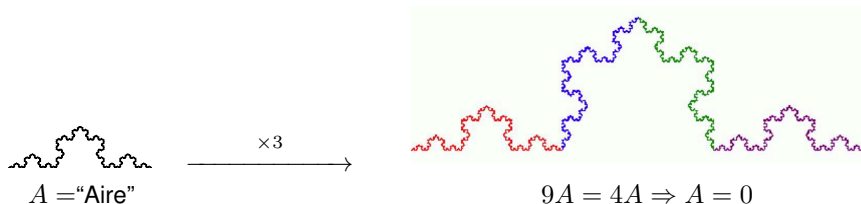
$$\text{longueur } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{3} \right)^n = +\infty$$





 $\times 3$ 

$$9A = 4A \Rightarrow A = 0$$



En multipliant par 3, on obtient 4 fois la courbe de départ :

- Plus d'une "ligne" car  $4 > 3$
- Moins qu'une "surface" car  $4 < 3^2$

On a donc besoin de **mesures intermédiaires** entre les mesures de longueur et les mesures d'aire.

Soit  $B \subset \mathbb{R}^n$  et  $s > 0$ . Pour tout  $\delta > 0$ , on pose

$$\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)^s : B \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \text{ et } \text{diam}(B_j) \leq \delta \right\}.$$

Si  $\delta$  tend vers 0,  $\mathcal{H}_\delta^s(B)$  croît. On définit la **mesure de Hausdorff**  $\mathcal{H}^s$  par

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(B)$$

Soit  $B \subset \mathbb{R}^n$  et  $s > 0$ . Pour tout  $\delta > 0$ , on pose

$$\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)^s : B \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \text{ et } \text{diam}(B_j) \leq \delta \right\}.$$

Si  $\delta$  tend vers 0,  $\mathcal{H}_\delta^s(B)$  croît. On définit la **mesure de Hausdorff**  $\mathcal{H}^s$  par

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(B)$$

On obtient des mesures intermédiaires entre les mesures de Lebesgue car

$$\mathcal{H}^n(B) = c_n \mathcal{L}_n(B).$$

Soit  $B \subset \mathbb{R}^n$  et  $s > 0$ . Pour tout  $\delta > 0$ , on pose

$$\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)^s : B \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \text{ et } \text{diam}(B_j) \leq \delta \right\}.$$

Si  $\delta$  tend vers 0,  $\mathcal{H}_\delta^s(B)$  croît. On définit la **mesure de Hausdorff**  $\mathcal{H}^s$  par

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(B)$$

On obtient des mesures intermédiaires entre les mesures de Lebesgue car

$$\mathcal{H}^n(B) = c_n \mathcal{L}_n(B).$$

**Changement d'échelle.** On a

$$\mathcal{H}^s(\lambda B) = \lambda^s \mathcal{H}^s(B)$$

car si  $B \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ , alors  $\lambda B \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \lambda B_j$ .

La dimension de Hausdorff permet de déterminer la mesure de Hausdorff la mieux adaptée à l'ensemble.

On remarque que si  $s < t$ , alors  $\mathcal{H}_\delta^s(B) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(B)$ . Ainsi

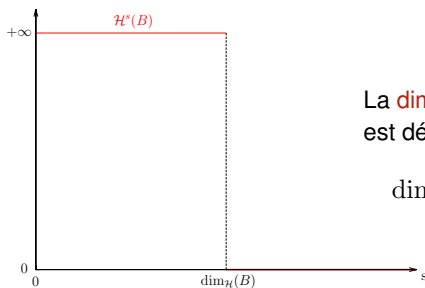
- si  $\mathcal{H}^t(B) > 0$ , alors  $\mathcal{H}^s(B) = +\infty$
- si  $\mathcal{H}^s(B) < +\infty$ , alors  $\mathcal{H}^t(B) = 0$ .

La dimension de Hausdorff permet de déterminer la mesure de Hausdorff la mieux adaptée à l'ensemble.

On remarque que si  $s < t$ , alors  $\mathcal{H}_\delta^s(B) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(B)$ . Ainsi

- si  $\mathcal{H}^t(B) > 0$ , alors  $\mathcal{H}^s(B) = +\infty$
- si  $\mathcal{H}^s(B) < +\infty$ , alors  $\mathcal{H}^t(B) = 0$ .

Il existe une valeur critique pour laquelle le graphe de  $s \mapsto \mathcal{H}^s(B)$  "saute" de  $+\infty$  à 0.



La **dimension de Hausdorff**  $\dim_{\mathcal{H}}(B)$  de  $B$  est définie par

$$\dim_{\mathcal{H}}(B) = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(B) = \infty\}.$$

Dans le cas de la courbe de Von Koch  $C$ , on a  $\mathcal{H}^1(C) = +\infty$  et  $\mathcal{H}^2(C) = 0$ .

# L'ensemble de Cantor



Pour tout  $n$ , soit  $C_n$  l'ensemble obtenu à la  $n^e$  étape de la construction.

- L'ensemble  $C_n$  est composé de  $2^n$  intervalles de longueur  $3^{-n}$ . Donc la mesure de  $C_n$  est  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$
- La mesure de Lebesgue de l'ensemble de Cantor  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$  est donc nulle.



# L'ensemble de Cantor



Pour tout  $n$ , soit  $C_n$  l'ensemble obtenu à la  $n^{\text{e}}$  étape de la construction.

- L'ensemble  $C_n$  est composé de  $2^n$  intervalles de longueur  $3^{-n}$ . Donc la mesure de  $C_n$  est  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$
- La mesure de Lebesgue de l'ensemble de Cantor  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$  est donc nulle.
- Idée intuitive : On décompose  $C = C_d \cup C_l$  où  $C_d$  et  $C_l$  sont obtenus à partir de  $C$  par un facteur d'échelle  $1/3$ . Donc

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_d) + \mathcal{H}^s(C_l) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C).$$

Si  $0 < \mathcal{H}^s(C) < +\infty$ , on a donc  $1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s$ , càd  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Donc

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

# L'ensemble de Cantor



Pour tout  $n$ , soit  $C_n$  l'ensemble obtenu à la  $n^e$  étape de la construction.

- L'ensemble  $C_n$  est composé de  $2^n$  intervalles de longueur  $3^{-n}$ . Donc la mesure de  $C_n$  est  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$
- La mesure de Lebesgue de l'ensemble de Cantor  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$  est donc nulle.
- Pour tout  $n$ , on a  $C \subseteq C_n$ . Donc

$$\mathcal{H}_{3^{-n}}^s(C) \leq \sum_{I \subseteq C_n} \text{diam}(I)^s = 2^n 3^{-ns} = 1$$

si  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Donc  $\mathcal{H}^s(C) < +\infty$  d'où  $\dim_{\mathcal{H}}(C) \leq s = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

- Il faudrait encore montrer l'autre inégalité.

On a toujours

$$\dim_{\mathcal{H}}(B) \leq \underline{\dim}_{\text{box}}(B)$$

mais la dimension de Hausdorff est plus compliquée à calculer.

**Exemple.** Le graphe de la fonction de Weierstrass

$$W_{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x).$$



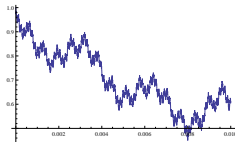
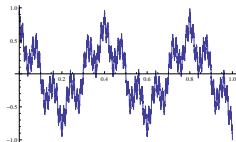
On a toujours

$$\dim_{\mathcal{H}}(B) \leq \underline{\dim}_{\text{box}}(B)$$

mais la dimension de Hausdorff est plus compliquée à calculer.

**Exemple.** Le graphe de la fonction de Weierstrass

$$W_{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x).$$



On a toujours

$$\dim_{\mathcal{H}}(B) \leq \underline{\dim}_{\text{box}}(B)$$

mais la dimension de Hausdorff est plus compliquée à calculer.

**Exemple.** Le graphe de la fonction de Weierstrass

$$W_{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x).$$

Si on pose  $\alpha = -\frac{\log a}{\log b}$ , alors

- $\dim_{\text{box}} \text{Graph}(W_{a,b}) = 2 - \alpha$  avec  $\alpha = -\frac{\log a}{\log b}$  (Kaplan, Mallet-Paret, Yorke 1984)
- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graph}(W_{a,b}) \leq 2 - \alpha$

On a toujours

$$\dim_{\mathcal{H}}(B) \leq \underline{\dim}_{\text{box}}(B)$$

mais la dimension de Hausdorff est plus compliquée à calculer.

**Exemple.** Le graphe de la fonction de Weierstrass

$$W_{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x).$$

Si on pose  $\alpha = -\frac{\log a}{\log b}$ , alors

- $\dim_{\text{box}} \text{Graph}(W_{a,b}) = 2 - \alpha$  (Kaplan, Mallet-Paret, Yorke 1984)
- $\dim_{\mathcal{H}} \text{Graph}(W_{a,b}) = 2 - \alpha$  (Keller 2017, Shen 2018)

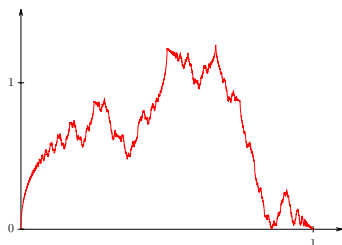
## Et l'analyse multifractale ?

Pour de nombreuses fonctions multifractales, l'exposant de Hölder change d'un point à l'autre d'une manière tellement erratique que les ensembles

$$E_\alpha^f = \{x \in \mathbb{R} : h_f(x) = \alpha\}$$

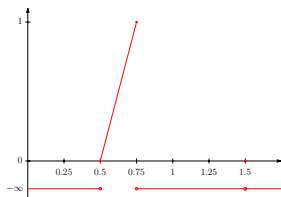
sont des ensembles fractals. Afin d'avoir une idée géométrique de la répartition des différentes irrégularités de  $f$  et de leur importance, on introduit le **spectre multifractal**  $d_f$  défini par

$$d_f : \alpha \in [0, +\infty] \mapsto \dim_{\mathcal{H}} E_\alpha^f.$$



**Exemple (Jaffard 1996).** Pour la fonction de Riemann  $R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$ , on a

$$d_R(h) = \begin{cases} 4h - 2 & \text{si } h \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 0 & \text{si } h = \frac{3}{2} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$



La fonction de Riemann est seulement dérivable aux points de la forme  $\frac{p}{q}$  avec  $p, q$  impairs.



- Le calcul de la dimension de Hausdorff est impossible à effectuer sur des “vrais” signaux.
- De nombreuses techniques existent pour **estimer** le spectre multifractal d'un signal  $f$ .
- Elles sont basées sur des idées de Frisch et Parisi (1985) et sont utilisées pour la classification de signaux et la sélection de modèles.
- Les techniques basées sur les ondelettes et les **coefficients dominants** sont très utilisées en pratique.

# Méthode des coefficients dominants

On considère la fonction d'échelle  $\tau_f$  définie par

$$\tau_f(q) := \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}^q}{\log 2^{-j}} \quad \text{i.e.} \quad \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}^q \sim 2^{(1-\tau_f(q))j}$$

Le spectre multifractal de  $f$  est alors estimé par la fonction

$$L_f : h \mapsto \inf_q \{hq - \tau_f(q)\} + 1$$

# Méthode des coefficients dominants

On considère la fonction d'échelle  $\tau_f$  définie par

$$\tau_f(q) := \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}^q}{\log 2^{-j}} \quad \text{i.e.} \quad \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}^q \sim 2^{(1-\tau_f(q))j}$$

Le spectre multifractal de  $f$  est alors estimé par la fonction

$$L_f : h \mapsto \inf_q \{hq - \tau_f(q)\} + 1$$

**Argument heuristique.** Si  $\lambda$  est un intervalle dyadique contenant un point  $x$  tel que  $h_f(x) = h$ , alors  $d_\lambda \sim 2^{-hj}$ . En utilisant la définition de la dimension, il y a  $2^{d_f(h)j}$  tels intervalles. La contribution de ces intervalles dans la somme est donc

$$2^{(d_f(h)-qh)j}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q \sim 2^{(1-\tau_f(q))j}$$

La contribution dominante sera celle correspondant à un  $h$  tel que l'exposant  $d_f(h) - qh$  est le plus grand possible

$$\implies \sup_h \{d_f(h) - qh\} = 1 - \tau_f(q)$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q \sim 2^{(1-\tau_f(q))j}$$

La contribution dominante sera celle correspondant à un  $h$  tel que l'exposant  $d_f(h) - qh$  est le plus grand possible

$$\implies \sup_h \{d_f(h) - qh\} = 1 - \tau_f(q)$$

$$\implies \inf_q \{hq - \tau_f(q)\} + 1 = d_f(h)$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q \sim 2^{(1-\tau_f(q))j}$$

La contribution dominante sera celle correspondant à un  $h$  tel que l'exposant  $d_f(h) - qh$  est le plus grand possible

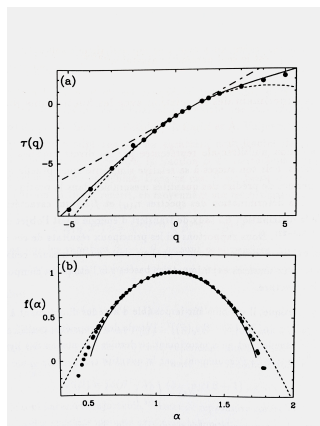
$$\implies \sup_h \{d_f(h) - qh\} = 1 - \tau_f(q)$$

$$\implies \inf_q \{hq - \tau_f(q)\} + 1 \geq d_f(h)$$

- $L_f$  est indépendant de la base d'ondelettes choisie
- Cette formule est satisfaite pour de nombreuses fonctions et processus aléatoires
- Elle est satisfaite pour "presque toutes" les fonctions de nombreux espaces fonctionnels.

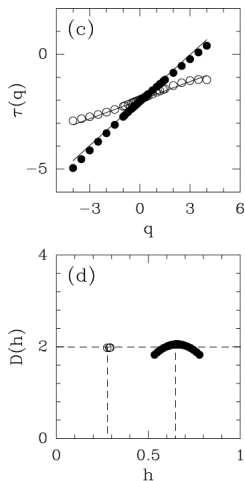
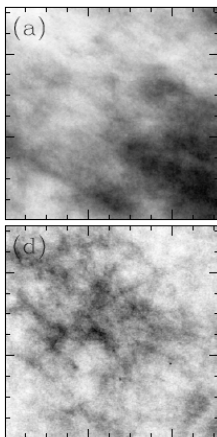
# Validation de modèles en turbulence

Données expérimentales comparées avec les prédictions de certains modèles de cascades d'énergie (Kolmogorov 41, log-normal, binomial)



Thèse de J.F. Muzy, 1993

# Détection de cancer lors de mammographies (mono vs multi)



*P. Kestener, J.M. Lina, P. Saint-Jean et A. Arneodo 2001*



## Quelques questions actuelles.

- Prescription de spectre : Trouver les conditions nécessaires et suffisantes à mettre sur une fonction  $d$  pour qu'il existe une fonction  $f$  qui satisfait  $d_f = d$ .
- Validité du formalisme : Trouver des critères (numériquement calculables) qui assurent que le formalisme est vérifié.
- Régularité plus fine : Comparer  $|f(x+h) - f(x)|$  avec des fonctions plus générales que  $|h|^\alpha$  (par exemple  $|h|^\alpha \log(|h|^{-1})$ )
- Analyse multifractale multivariée : Trouver des méthodes d'estimation de

$$d_{f_1, f_2}(h_1, h_2) = \dim_{\mathcal{H}} \{x : h_{f_1}(x) = h_1, h_{f_2}(x) = h_2\}.$$

# Analyse multifractale ailleurs

## Un point de vue général

Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $A$  un ensemble et pour tout  $\alpha \in A$ , une propriété  $P(\alpha)$  sur les éléments de  $X$ . On pose

$$E_{P(\alpha)} := \{x \in X : x \text{ satisfait la propriété } P(\alpha)\}$$

Le spectre multifractal associé est l'application

$$\alpha \in A \mapsto \dim_{\mathcal{H}} E_{P(\alpha)}$$

Si  $X = \bigcup_{\alpha \in A} E_{P(\alpha)}$ , on obtient une classification géométrique des points de  $X$ .

# Analyse multifractale ailleurs

## Un point de vue général

Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $A$  un ensemble et pour tout  $\alpha \in A$ , une propriété  $P(\alpha)$  sur les éléments de  $X$ . On pose

$$E_{P(\alpha)} := \{x \in X : x \text{ satisfait la propriété } P(\alpha)\}$$

Le spectre multifractal associé est l'application

$$\alpha \in A \mapsto \dim_{\mathcal{H}} E_{P(\alpha)}$$

Si  $X = \bigcup_{\alpha \in A} E_{P(\alpha)}$ , on obtient une classification géométrique des points de  $X$ .

### Exemples.

- Approximation diophantienne
- Fréquence d'apparition de digits
- Etude des points rapides du mouvement Brownien
- Etude des points de divergence d'une série de Fourier

# Divergence des séries de Fourier

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2i\pi kx} \quad \text{où} \quad c_k = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt$$

- Du Bois Raymond (1873) : Il existe une fonction de  $\mathcal{C}(\mathbb{T})$  dont la série de Fourier diverge en un point.
- Kahane et Katznelson (1966) : Si  $A \subset \mathbb{T}$  est un  $F_\sigma$  de mesure de Lebesgue nulle, il existe  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  dont la série de Fourier diverge en tout point de  $A$ .
- Carleson et Hunt (1967) : Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$  ( $p > 1$ ), sa série de Fourier converge presque partout.

# Divergence des séries de Fourier

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2i\pi kx} \quad \text{où} \quad c_k = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt$$

- Du Bois Raymond (1873) : Il existe une fonction de  $\mathcal{C}(\mathbb{T})$  dont la série de Fourier diverge en un point.
- Kahane et Katznelson (1966) : Si  $A \subset \mathbb{T}$  est un  $F_\sigma$  de mesure de Lebesgue nulle, il existe  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  dont la série de Fourier diverge en tout point de  $A$ .
- Carleson et Hunt (1967) : Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$  ( $p > 1$ ), sa série de Fourier converge presque partout.

## Question .

Soit  $x$  un point de divergence du développement de  $f \in L^p(\mathbb{T})$ . Caractérisation du taux de divergence ? Taille de l'ensemble des points ayant un taux de divergence donné ?

Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$ , on a

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |S_n f(x)| \leq C_p n^{1/p} \|f\|_p$$

Si  $\alpha \in [0, 1/p]$ , que peut-on dire sur la taille de l'ensemble des points  $x$  tels que  $|S_n f(x)| \approx n^\alpha$  ?

Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$ , on a

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |S_n f(x)| \leq C_p n^{1/p} \|f\|_p$$

Si  $\alpha \in [0, 1/p]$ , que peut-on dire sur la taille de l'ensemble des points  $x$  tels que  $|S_n f(x)| \approx n^\alpha$  ?

**Indice de divergence** au point  $x$  :

$$\alpha_f(x) = \inf \{ \alpha \geq 0 : |S_n f(x)| = O(n^\alpha) \} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log n}$$

**Spectre mutlifractal** de l'indice de divergence :

$$D_f : \alpha \in [0, 1/p] \mapsto \dim_{\mathcal{H}} \{ x : \alpha_f(x) = \alpha \}$$

Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$ , on a

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |S_n f(x)| \leq C_p n^{1/p} \|f\|_p$$

Si  $\alpha \in [0, 1/p]$ , que peut-on dire sur la taille de l'ensemble des points  $x$  tels que  $|S_n f(x)| \approx n^\alpha$  ?

**Indice de divergence** au point  $x$  :

$$\alpha_f(x) = \inf \{ \alpha \geq 0 : |S_n f(x)| = O(n^\alpha) \} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log n}$$

**Spectre mutlifractal** de l'indice de divergence :

$$D_f : \alpha \in [0, 1/p] \mapsto \dim_{\mathcal{H}} \{x : \alpha_f(x) = \alpha\}$$

**Bayart, Heurteaux (2011)**

Quasi-toute fonction  $f \in L^p(\mathbb{T})$  satisfait

$$D_f(\alpha) = 1 - \alpha p, \quad \forall \alpha \in [0, 1/p].$$



# Références



P. Abry, S. Jaffard, H. Wendt

Irregularities and Scaling in Signal and Image Processing : Multifractal Analysis

*arXiv :1210.0482*, 2012.



P. Allaart, C. Pieter, K. Kawamura

The Takagi function : a survey

*Real Anal. Exchange*, 37, 1–54,2011.



F. Bayart, Y. Heurteaux,

Multifractal analysis of the divergence of Fourier series

*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, .



H. Delange

Sur la fonction sommatoires de la fonction “somme des chiffres”.

*Enseign. Math.*, 21,31–47, 1975.



P. Frankhauser

La fractalité des structures urbaines

*Partis, Anthropos*, 1994.

# Références



S. Jaffard

Wavelet techniques in multifractal analysis

*Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., 91–151, 2006.



S. Jaffard

The spectrum of singularities of Riemann's function

*Rev. Mat. Iberoamericana*, 12, 441–460, 1996.



J. R. Trollope

An explicit expression for binary digital sums

*Math. Mag.*, 41, 21–25, 1968.



K.J. Falconer

The geometry of fractal sets

*Cambridge University Press*, 1986